

Katarzyna ZEUG-ŻEBRO\*

## ZASTOSOWANIE MODELI PRZESTRZENNYCH W ANALIZIE ZJAWISKA STARZENIA SIĘ POPULACJI

DOI: 10.21008/j.0239-9415.2020.081.17

Proces starzenia się społeczeństwa jest zjawiskiem wieloaspektowym, na które ma wpływ m.in. demograficzna i przestrzenna charakterystyka badanych obszarów. Zastosowanie analizy przestrzennej do badania tego procesu pozwala na ustalenie istniejących relacji między badanymi regionami w odniesieniu do tego zjawiska. W artykule podjęto próbę przestrzennego modelowania zjawiska starzenia się ludności. Dla wybranej zmiennej charakteryzującej starzejącą się populację, tj. liczby osób w wieku poprodukcyjnym, stworzono klasyczny model ekonometryczny oraz zweryfikowano konieczność uwzględnienia czynnika przestrzennego w modelowaniu badanego zjawiska. Jako zmienne objaśniające modelu wzięto pod uwagę zmienne demograficzne oraz zmienne o charakterze ekonomiczno-społecznym. W tym celu rozpatrzono dwa modele przestrzenne: błądu przestrzennego i opóźnienia przestrzennego.

**Słowa kluczowe:** analiza zjawiska starości, skutki społeczno-ekonomiczne, model błądu przestrzennego, model opóźnienia przestrzennego

### 1. WPROWADZENIE

Zmiany demograficzne obserwowane obecnie w wielu w krajach (nie tylko rozwiniętych) wyraźnie wskazują na starzenie się populacji, tj. spadek urodzeń przy jednoczesnym wydłużaniu się życia osób starszych (United Nations..., 2017). Prognozuje się, że w perspektywie najbliższych dziesięcioleci tendencja ta jeszcze się nasili, doprowadzając do istotnych przeobrażeń w proporcjach między liczbą osób starszych i młodych. Główne zagrożenia wynikające z tego zjawiska to zmiany w wielkości zasobów pracy oraz idące w ślad za tym skutki społeczno-ekonomiczne.

---

\* Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki, ORCID: 0000-0001-7786-3478, ResearcherID: R-5162-2018.

W Polsce zmiana zachodząca w strukturze wieku mieszkańców będzie szczególnie dotkliwa, gdyż zgodnie z prognozami Głównego Urzędu Statystycznego przestanie ona być jednym z najmłodszych państw Unii Europejskiej i w 2060 r. stanie się jednym z najstarszych.

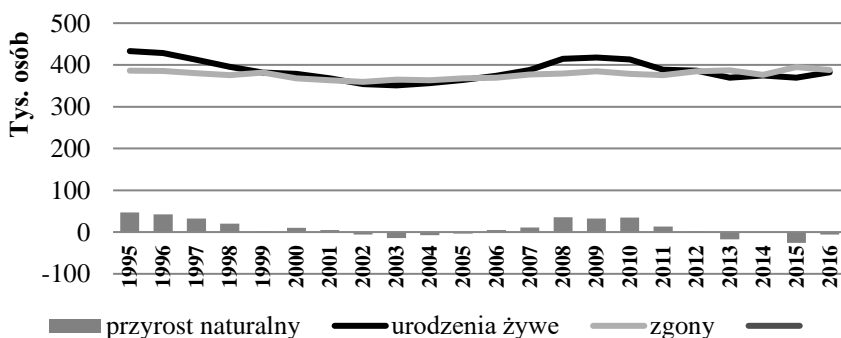
Głównym celem artykułu jest analiza zjawiska starzenia się społeczeństwa w Polsce oraz próba wykorzystania wybranych metod i modeli ekonometrii przestrzennej w badaniach tego procesu. Problem badawczy wiązał się z określeniem na drodze modelowania regresyjnego wpływu cech o charakterze demograficznym i społeczno-ekonomicznym na wzrost liczby osób w wieku poprodukcyjnym. Istotą prowadzonych analiz było włączenie do badań modeli regresji przestrzennej, które w sytuacji danych przestrzennie zlokalizowanych cechują się większą precyzją w szacowaniu powiązań między badanymi zmiennymi (Anselin, 1988).

Badanie procesu starzenia przeprowadzono z wykorzystaniem danych zagregowanych do poziomu podregionu (NUTS 3). Uzyskano je z Banku Danych Lokalnych Głównego Urzędu Statystycznego oraz z baz danych Eurostatu. Ze względu na ograniczenia wynikające z dostępności danych źródłowych w analizie wzięto pod uwagę wybrane lata (2011, 2014 i 2016). Wszystkie obliczenia wykonano z użyciem programu R Cran i pakietu Microsoft Excel.

## 2. PROCES STARZENIA SIĘ SPOŁECZEŃSTWA POLSKIEGO

Obserwowane zmiany demograficzne świadczą o tym, że struktura ludności w Polsce jest w bardzo złym stanie. Dane przedstawione w najnowszej publikacji Głównego Urzędu Statystycznego (Rozkrut, 2017) potwierdzają tę tezę; dodatkowo wynika z nich, że w najbliższej perspektywie sytuacja ta nie ulegnie zmianie, w związku z czym nie należy oczekiwać stabilnego rozwoju demograficznego.

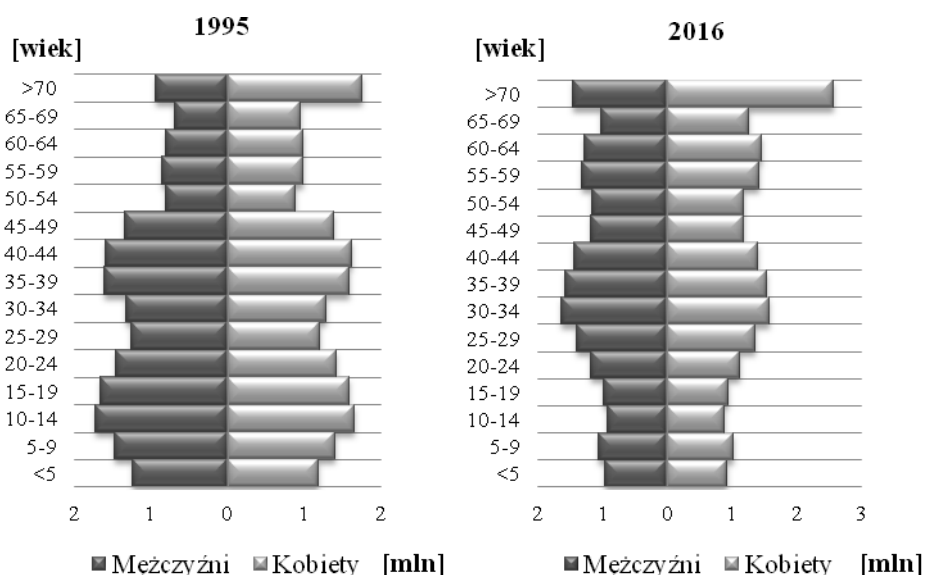
Szczegółowy obraz zmian w liczebności i strukturze polskiego społeczeństwa można zauważyć, obserwując m.in. ruch naturalny ludności (rys. 1).



Rys. 1. Ruch naturalny ludności w Polsce w latach 1995-2016. Opracowanie własne

Z danych przedstawionych na rys. 1 wynika, że w okresach 2002-2005 i 2013-2016 odnotowano ujemny przyrost naturalny ludności, będący rezultatem mniejszej niż w latach poprzednich (1995-2001 oraz 2006-2012) liczby urodzeń przy jednoczesnym wzroście liczby zgonów. Największą liczbę urodzeń (powyżej 400 tys.) obserwuje się w latach 1995-1997 oraz 2008-2013, natomiast najniższą (poniżej 360 tys.) w latach 2002-2004. Liczba urodzeń w 2016 r. w porównaniu z 1995 r. zmniejszyła się o ponad 50 tys., a liczba zgonów wzrosła o prawie 2 tys.

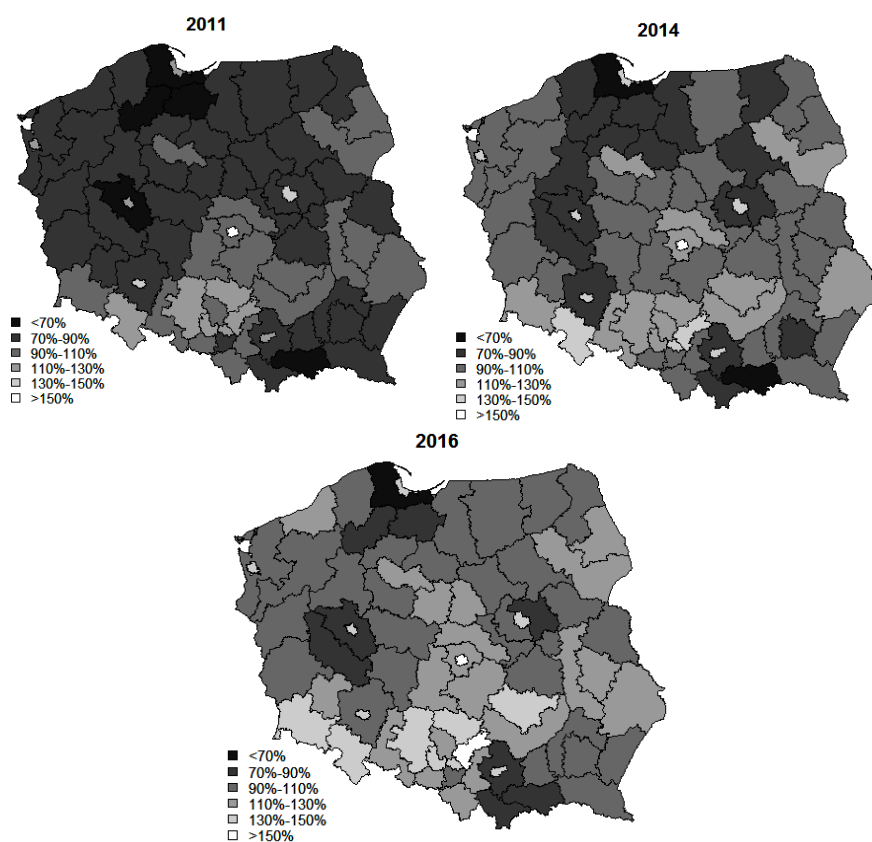
Analizując strukturę ludności w latach 1995 i 2016 według grup wiekowych i płci (rys. 2), należy zauważyć, że reprezentuje ona typ regresyjny, cechujący się ryzykiem wystąpienia zjawiska depopulacji. Charakterystyczna zwężająca się podstawa piramid w latach 1995 i 2016 oznacza spadek płodności.



Rys. 2. Piramida wieku ludności w Polsce w latach 1995 i 2016.  
Opracowanie własne

Porównując obie piramidy ze względu na udział dzieci w wieku 0–14 lat w ogólnej ludności, można zauważyć spadek od 23,1% w 1995 r. do 15% w 2016 r. Udział osób w wieku 65 lat i więcej w ogóle społeczeństwa wzrósł z poziomu 10,9% w 1995 r. do 16% w 2016 r. Przedstawione piramidy świadczą również o wyraźnej nierównowadze pod względem płci. Wśród osób do 39. roku życia w 1995 r. i do 49. roku życia w 2016 r. przeważają mężczyźni; dopiero później pojawia się przewaga ilościowa kobiet, spowodowana większą umieralnością mężczyzn.

Proces starzenia ludności można również obserwować w ujęciu przestrzennym (Zeug-Żebro, Miśkiewicz-Nawrocka, 2017). Na rysunku 3 przedstawiono indeks starości demograficznej w podziale na podregiony. Ta graficzna prezentacja pozwala wyodrębnić obszary o zdecydowanie najwyższym i najniższym indeksie starości. W 2011 r. dużą wartość tego indeksu ( $> 130\%$ ) zaobserwowano w trzech podregionach: miasto Łódź, miasto Wrocław i miasto Warszawa, a najmniejszą ( $< 70\%$ ) w starogardzkim, chojnickim, gdańskim, nowosądeckim i poznańskim.



Rys. 3. Indeks starości demograficznej w podregionach Polski w latach 2011, 2014 i 2016.  
Opracowanie własne

W kolejnych latach sytuacja uległa wyraźnej zmianie. W 2014 r. najmniejszą wartość indeksu starości ( $< 70\%$ ) obserwowano już tylko w dwóch podregionach, a wartość największą aż w dziesięciu. W kolejnych latach nadal obserwowano zwiększający się poziom indeksu starości w poszczególnych podregionach. W 2016 r. najmniejszą wartość tego indeksu ( $< 70\%$ ) odnotowano na jednym obszarze (podregion gdański). W pozostałych podregionach jego wartość była więk-

sza (> 90%). Na mapach można dostrzec również skupiska podregionów o podobnych lub istotnie różnych wartościach indeksu starości demograficznej.

Obserwowane zjawisko jest dość niepokojące, gdyż w przyszłości wzrost liczby osób w starszym wieku będzie powodować m.in. zmniejszanie się podaży pracy i utrudnienia w systemie zabezpieczenia społecznego. Jeśli pracujących będzie coraz mniej, to gospodarka w Polsce zamiast przyspieszać, zacznie zwalniać. Taka zmiana spowoduje także znaczący wzrost kosztów dla systemu opieki zdrowotnej, którego kondycja już teraz jest dość napięta. Wymienione skutki procesu starzenia się społeczeństwa są zaledwie początkiem problemów, z jakimi trzeba będzie się zmierzyć w najbliższej przyszłości.

### 3. MODELE PRZESTRZENNE

Sformułowane w ubiegłym wieku prawo Toblera (1970), zgodnie z którym wszystko jest ze sobą powiązane, ale obiekty bliższe są bardziej powiązane niż odległe, dało początek badaniom związanym z modelowaniem przestrzennym. Od tej pory powstało wiele metod i narzędzi analizy przestrzennej (LeSage, Pace, 2004; 2009; Suhecki, 2010; 2012; Pietrzykowski, 2011; Wolny-Dominiak, Zeug-Żebro, 2012; Mastalerz-Kodzis, Pośpiech, 2016). Na uwagę zasługują dwie grupy modeli opisujących zależności przestrzenne:

- modele błędu przestrzennego,
- modele opóźnienia przestrzennego.

#### 3.1. Model opóźnienia przestrzennego

Model opóźnienia przestrzennego jest modelem typu autoregresyjnego, tzn. zawiera opóźnioną przestrzennie zmienną endogeniczną  $Wy$ . Ogólną postać tego modelu można zapisać za pomocą następującego wzoru:

$$y = \beta X + \alpha Wy + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (1)$$

gdzie:  $\beta$  – wektor współczynników modelu,  $X$  – macierz zmiennych niezależnych,  $\varepsilon$  – błąd modelu,  $\alpha$  – współczynnik autokorelacji przestrzennej,  $W$  – macierz wag przestrzennych  $[w_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , przy czym

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy jednostka } i \text{ – ta jest sąsiadem } j \text{ – tej jednostki} \\ 0, & \text{gdy jednostka } i \text{ – ta nie jest sąsiadem } j \text{ – tej jednostki} \\ 0, & \text{gdy } i = j, \text{ tj. elementy diagonalne macierzy} \end{cases} \quad (2)$$

Za pomocą modelu opóźnienia przestrzennego sprawdza się istotność opóźnionej przestrzennie zmiennej zależnej, tj. czy  $\alpha = 0$ . Opóźnienie przestrzenne  $\mathbf{W}y$  interpretowane jest jako poziom zmiennej zależnej ( $y$ ) w obszarach sąsiednich. W przypadku, gdy to opóźnienie jest istotne, poziom zmiennej zależnej  $y$  w  $i$ -tym regionie można wyjaśnić przez poziom zjawiska w jednostkach sąsiednich  $j$  oraz inne czynniki reprezentowane przez pozostałe zmienne objaśniające.

### 3.2. Model błędu przestrzennego

W modelu błędu przestrzennego zakłada się autokorelację przestrzenną reszt modelu. Jego postać można zapisać za pomocą równania:

$$y = \beta\mathbf{X} + \delta \quad (3)$$

gdzie:

$$\delta = \mu\mathbf{W}\delta + \varphi, \quad \varphi \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I}) \quad (4)$$

przy czym  $\mu$  – parametr autokorelacji przestrzennej,  $\varphi$  – niezależny błąd modelu,  $\mathbf{W}\delta$  – błąd przestrzennie opóźniony, zaś pozostałe oznaczenia są analogiczne jak w równaniu (1). Błąd  $\mathbf{W}\delta$  można interpretować jako średni błąd z lokalizacji sąsiednich.

W modelu błędu przestrzennego testuje się brak autokorelacji przestrzennej, tj. czy  $\mu = 0$ . Współczynniki  $\beta$  estymowane są metodą MNK, a parametr  $\mu$  – przez optymalizację.

W tej grupie modeli badana jest przestrzenna zależność reszt. Pojawienie się autokorelacji przestrzennej w błędzie modelu może być skutkiem pominięcia nieobserwowanych zmiennych (takich jak pogoda, czynniki kulturowe itp.), które mogą być przestrzennie skorelowane (Kopczewska, 2011).

### 3.3. Etapy wyboru modelu przestrzennego

Identyfikacja i specyfikacja modelu przestrzennego przebiega w czterech etapach (Anselin, 2006; Suchecki, 2010; Kopczewska, 2011):

1. Estymacja modelu liniowego metodą najmniejszych kwadratów (MNK).
2. Badanie autokorelacji przestrzennej reszt w liniowym modelu MNK (Anselin, Rey, 1991). W tym celu stosuje się test  $I$  Morana dla reszt (Moran, 1950):

$$I = \frac{n}{s_0} \cdot \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \quad (5)$$

gdzie:  $n$  – liczba regionów,  $\mathbf{u}$  – wektor kolumnowy reszt modelu MNK,  $S_0$  – suma elementów macierzy wag,  $S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}$ ,  $\mathbf{W}$  – macierz wag przestrzennych stopnia  $n$ ,  $w_{ij}$  – elementy macierzy wag  $\mathbf{W}$ .

Test ten weryfikuje następującą hipotezę:  $H_0$  – brak autokorelacji reszt modelu,  $H_1$  – występowanie autokorelacji reszt modelu. Istnienie autokorelacji przestrzennej w resztach modelu nie zawsze oznacza, że należy zastosować modele przestrzenne. Autokorelacja ta może być skutkiem estymowania związku nieliniowego modelem liniowym i wtedy warto sprawdzić reszty modelu szacowanego na logarytmach zmiennych (Cliff, Ord, 1970).

3. Kolejnym etapem jest badanie istnienia zależności przestrzennej w modelach liniowych z wykorzystaniem testu  $LM$  (mnożnika Lagrange'a) (Anselin et al., 1996). W tym celu stosuje się dwa podstawowe testy klasy  $LM$ , tj.  $LM_{\text{error}}$  i  $LM_{\text{lag}}$ . Test  $LM_{\text{error}}$  służy do sprawdzenia zależności przestrzennej błędu, a test  $LM_{\text{lag}}$  – do zbadania istotności przestrzennie opóźnionej zmiennej zależnej.
  - Statystyka testowa  $LM_{\text{error}}$  z asymptotycznym rozkładem  $\chi^2(1)$  ma postać:

$$LM_{\text{error}} = \frac{1}{T_1} \left( \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u}}{\hat{\sigma}^2} \right)^2 \quad (6)$$

We wzorze (6)  $\hat{\sigma}^2$  – oszacowany błąd standardowy, a ponadto:

$$T_1 = \text{tr}[(\mathbf{W}^T + \mathbf{W})\mathbf{W}] \quad (7)$$

gdzie  $\text{tr}$  jest operatorem śladu macierzy; pozostałe oznaczenia jak we wzorze (5).

Statystyka (6) pozwala zweryfikować hipotezę dotyczącą istotności statystycznej współczynnika  $\mu$  ( $H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$ ).

- Statystyka  $LM_{\text{lag}}$  z asymptotycznym rozkładem  $\chi^2(1)$  przyjmuje postać:

$$LM_{\text{lag}} = \frac{1}{T_2} \left( \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{y}}{\hat{\sigma}^2} \right)^2 \quad (8)$$

gdzie:

$$T_2 = T_1 + \frac{(\mathbf{W} \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{M} (\mathbf{W} \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\hat{\sigma}^2} \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \quad (10)$$

przy czym  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  – wektor współczynników oszacowanych metodą MNK; pozostałe symbole jak powyżej.

Statystyka opisana wzorem (8) umożliwia weryfikację hipotezy dotyczącej istotności statystycznej współczynnika  $\alpha$  ( $H_0: \alpha = 0, H_1: \alpha \neq 0$ ).

Wybór modelu przestrzennego jest determinowany większą (istotną) wartością statystyki  $LM$  (jeśli  $LM_{\text{lag}} > LM_{\text{error}}$ , to należy wybrać model opóźnienia przestrzennego; w przeciwnym razie w badaniach zostaje zastosowany model błędu przestrzennego).

4. Ostatnim etapem identyfikacji i specyfikacji modelu przestrzennego jest przeprowadzenie dodatkowych testów diagnostycznych (test  $LR$  i test Walda) oraz porównanie wartości statystycznych tych testów z wartościami testu  $LM$ . Następujące współzależności wskazują właściwą specyfikację modelu:
- dla modelu błędu przestrzennego:  $Wald(\mu) \geq LR_{\text{error}} \geq LM_{\text{error}}$ ,
  - dla modelu opóźnienia przestrzennego:  $Wald(\alpha) \geq LR_{\text{lag}} \geq LM_{\text{lag}}$ .

#### 4. OCENA MODELI

Analizę statystyczną wpływu czynników demograficznych i społeczno-ekonomicznych na proces starzenia się społeczeństwa przeprowadzono dla 73 podregionów Polski (wg klasyfikacji UE – NUTS 3). W tym celu wykorzystano dane Głównego Urzędu Statystycznego i Eurostatu z lat 2011, 2014 i 2016. Badanie rozpoczęto od wyboru zmiennych stanowiących podstawę oszacowania trzech modeli regresji. Zmienną zależną charakteryzującą starzejącą się populację była ogólna liczba osób w wieku poprodukcyjnym (LPT65+). Do zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających wybrano jedenaście wskaźników:

- liczba zgonów osób w wieku do 65 lat na 1000 ludności w tej grupie wiekowej (Z65),
- przyrost naturalny na 1000 ludności (PN),
- produkt krajowy brutto (PKB),
- liczba lekarzy na 1000 ludności (L),
- liczba łóżek w szpitalach ogólnych (LŁ),
- liczba aptek ogólnodostępnych (LA),
- liczba pielęgniarek i położnych na 1000 ludności (PP),
- liczba osób starszych w placówkach pomocy społecznej (LPPS),
- liczba bezrobotnych zarejestrowanych (BZ),
- przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto (PMW),
- liczba pracujących na 1000 ludności (LP).

Wszystkie obliczenia i mapy zostały wykonane w programie statystycznym R CRAN i Microsoft Excel.

W pierwszym etapie badania oszacowano liniowe modele ekonometryczne opracowane na lata 2011, 2014 i 2016. W tabeli 1 przedstawiono wyniki estymacji modeli ekonometrycznych. Symbol „-” oznacza, że parametr był statystycznie nieistotny.

W skład każdego modelu weszło co najmniej sześć zmiennych objaśniających. Poziom współczynnika determinacji wszystkich modeli jest bardzo wysoki, dlatego dopasowanie modeli jest bardzo dobre.

W następnym kroku analizy zbadano przestrzenną autokorelację błędów. W tym celu zastosowano test Morana  $I$  dla reszt modelu. Wyniki badań przedstawiono w tab. 2.



Tabela 1. Wyniki estymacji modeli liniowych

Zmienne	Wartości współczynników		
	model 2011	model 2014	model 2016
	LPT65+	LPT65+	LPT65+
Z65	–	–	–
PN	–1975,000	–2131,000	–2268,000
PKB	0,581	0,310	0,355
L	–	–	–
LŁ	5,491	8,010	7,663
LA	266,700	345,000	362,400
PP	–276,300	–349,700	–268,600
LPPS	31,670	–	–
BZ	0,390	0,533	0,529
PMW	–	5,605	–
LP	–	–	–
<b>R<sup>2</sup></b>	0,9755	0,9803	0,9737

Opracowanie własne.

Tabela 2. Wartości statystyki Morana *I* dla reszt modelu MNK

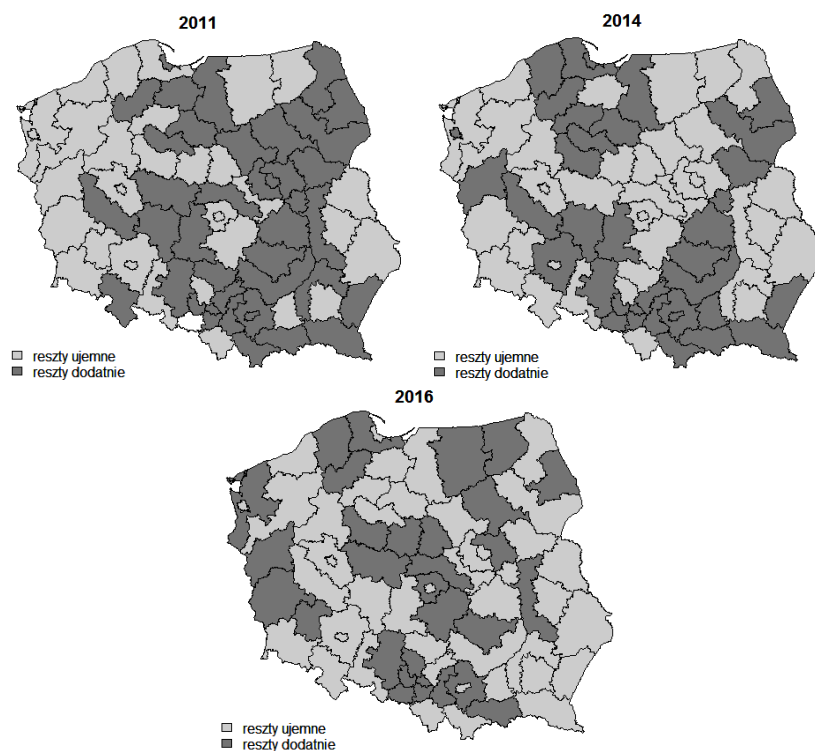
Model 2011		Model 2014		Model 2016	
<i>I</i>	wartość <i>p</i>	<i>I</i>	wartość <i>p</i>	<i>I</i>	wartość <i>p</i>
0,02453	0,254	0,25389	1,3·10 <sup>-4</sup>	0,35202	4,57·10 <sup>-7</sup>

Opracowanie własne.

Dla dwóch oszacowanych modeli (2014 i 2016) statystyki Morana *I* są dodatnie i istotne statystycznie. Taka sytuacja wskazuje na występowanie autokorelacji przestrzennej, czyli brak przypadkowości w rozkładzie reszt. Wartość tej statystyki w przypadku modelu oszacowanego na podstawie danych z 2011 r. jest statystycznie nieistotna, co wskazuje na brak autokorelacji przestrzennej. Na rysunku 4 zilustrowano rozkład reszt wybranych modeli z podziałem na reszty dodatnie i ujemne.

Reszty nie są rozłożone losowo, lecz zależą od położenia. Oznacza to, że wzrost liczby osób w wieku poprodukcyjnym można tłumaczyć przyrostem wartości danej wybranych zmiennych objaśniających, ale należy pamiętać, że istnieją jeszcze inne czynniki determinujące zjawisko starzenia się społeczeństwa. W regio-

nach, w których reszty są dodatnie, model nie doszacowuje zmian w liczbie osób starszych. Wartości badanej zmiennej zależnej są tam większe od średniej dla całego badanego obszaru.



Rys. 4. Wykresy reszt modeli 2011, 2014 i 2016 z podziałem na reszty dodatnie i ujemne.  
Opracowanie własne

Kontynuując diagnostykę modelu, zastosowano test  $LM$  i sprawdzono, który z modeli, opóźnień czy błędu przestrzennego, będzie lepszy. Wyniki tej analizy przedstawiono w tab. 3.

Tabla 3. Wybór modelu przestrzennego

Model	Test $LM$				Typ modelu przestrzennego
	$LM_{error}$	wartość $p$	$LM_{lag}$	wartość $p$	
Model 2011	0,0904	$7,64 \cdot 10^{-1}$	1,0003	$3,17 \cdot 10^{-1}$	–
Model 2014	9,684	$1,86 \cdot 10^{-3}$	0,017	$8,96 \cdot 10^{-1}$	model błędu przestrzennego
Model 2016	18,617	$1,598 \cdot 10^{-5}$	0,275	$6,01 \cdot 10^{-1}$	model błędu przestrzennego

Opracowanie własne.

Testy  $LM_{lag}$  dla modeli oszacowanych na podstawie danych z lat 2014 i 2016 są nieistotne, zatem można przyjąć, że lepiej użyć modeli błędu przestrzennego. W przypadku modelu 2011 oba testy były nieistotne.

Dodatkowo w tab. 4 przedstawiono wartości kryteriów informacyjnych: Akaike (AIC), Bayesian (BIC) i logLik. Uzyskane wyniki umożliwiają porównanie modelu MNK z modelami przestrzennymi (SEM – model błędu przestrzennego, SLM – przestrzenny model opóźnienia). Najlepszym modelem jest ten, dla którego kryteria AIC i BIC przybierają najmniejsze wartości, podczas gdy kryterium logLik przybiera wartości największe.

Tabela 4. Wartości kryteriów informacyjnych

Model		Wartości kryteriów		
		AIC	BIC	logLik
2011	SLM	1517,025	1539,929	<b>-748,512</b>
	SEM	1517,650	1540,555	-748,825
	MNK	<b>1515,935</b>	<b>1536,549</b>	-748,967
2014	SLM	1513,017	1535,922	-746,509
	SEM	<b>1502,807</b>	<b>1525,711</b>	<b>-741,403</b>
	MNK	1511,033	1531,648	-746,517
2016	SLM	1538,907	1559,521	-760,453
	SEM	<b>1517,671</b>	<b>1538,286</b>	<b>-749,836</b>
	MNK	1537,162	1555,485	-760,581

Opracowanie własne.

Tabela 5. Rezultaty estymacji modelu błędu przestrzennego

Zmienne	Wartości współczynników	
	model 2014	model 2016
	LPT65+	LPT65+
PN	-2246,9000	-2094,5000
PKB	0,3390	0,3320
LŁ	7,1840	6,1631
LA	355,4600	396,8200
PP	-333,0400	-245,7300
BZ	0,5416	0,6529
PMW	5,3402	-
$\mu$	0,4953	0,6653

Opracowanie własne.

Wartości kryteriów informacyjnych dla modeli 2014 i 2016 wyraźnie wskazują model błędu przestrzennego, a wyniki uzyskane dla modelu 2011 nie są jednoznaczne. Dla modeli 2014 i 2016 stworzono sugerowany model przestrzenny; wyniki estymacji podano w tab. 5.

W obu przypadkach współczynniki modelu oraz współczynniki autokorelacji okazały się statystycznie istotne. W celu potwierdzenia odpowiedniej specyfikacji modelu określono dodatkowe wartości statystyczne wybranych testów diagnostycznych i sprawdzono zależność:  $Wald(\mu) \geq LR_{\text{error}} \geq LM_{\text{error}}$  (dla modelu błędu przestrzennego). Uzyskane rezultaty spełniały powyższą zależność, potwierdzając jednocześnie ważność wyboru modelu.

## 5. PODSUMOWANIE

Badania wykazały, że w niektórych przypadkach uzasadnione jest stosowanie modeli przestrzennych. W wyniku zastosowania metody najmniejszych kwadratów powstały trzy modele liniowe opisujące zjawisko starzenia się populacji. Zmienną endogeniczną w tych modelach była liczba osób w wieku poprodukcyjnym (w latach 2011, 2014 i 2016). Modele 2014 i 2016 charakteryzowały się autokorelacją przestrzenną. Sytuacja ta skłoniła do zbadania możliwości oszacowania modeli przestrzennych za pomocą testów *LM*. Dla modeli 2014 i 2016 wybrano modele błędów przestrzennych. Dobrą specyfikację modeli przestrzennych potwierdzają wartości odpowiednich statystyk. Badania wykazały, że modelowanie przestrzenne w przypadku omawianych zagadnień jest uzasadnione. Konieczne jest jednak pogłębienie badań przez dokładniejszą identyfikację modeli i uwzględnienie innych macierzy sąsiedztwa.

## LITERATURA

- Anselin, L. (1988). *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Anselin, L. (2006). *Spatial Analysis with GeoDa. 4. Spatial Regression*. Urbana-Champaign: University of Illinois.
- Anselin, L., Rey, S.J. (1991). Properties of tests for spatial dependence in linear-regression models. *Geographical Analysis*, 23, 112–131.
- Anselin, L., Bera, A.K., Florax, R., Yoon, M.J. (1996). Simple diagnostic tests for spatial dependence. *Regional Science and Urban Economics*, 26, 77–104.
- Cliff, A., Ord, J.K. (1970). Spatial Autocorrelation: A Review of Existing and New Measures with Applications. *Economic Geography*, 46, 269–292.

- <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (10.05.2019).
- <https://bdl.stat.gov.pl/> (10.05.2019).
- Kopczewska, K. (2011). *Ekonometria i statystyka przestrzenna z wykorzystaniem programu R Cran*. Warszawa: CeDeWu.
- LeSage, J.P., Pace, R.K. (2004). *Advances in Econometrics: Spatial and Spatiotemporal Econometrics*. Amsterdam: Elsevier.
- LeSage, J.P., Pace, R.K. (2009). *Introduction to Spatial Econometrics*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Mastalerz-Kodzis, A., Pośpiech, E. (2016). Socio-economic consequences of globalization – spatial analysis of economic characteristics in European Union countries. In: T. Klietk (Ed.). *Globalization and its socio-economic consequences. 16th International Scientific Conference Proceedings*, PTS I-V, 1313–1321. Rajecke Teplice, Slovakia.
- Moran, P.A.P. (1950). Notes on Continuous Stochastic Phenomena. *Biometrika*, 37 (1), 17–23.
- Pietrzykowski, R. (2011). Wykorzystanie metod statystycznej analizy przestrzennej w badaniach ekonomicznych. *Roczniki Ekonomiczne Kujawsko-Pomorskiej Szkoły Wyższej w Bydgoszczy*, 4, 97–112.
- Rozkrut, D. (Ed.) (2017). *Rocznik Demograficzny 2017*. Warszawa: Zakład Wydawnictw Statystycznych.
- Sucheckí, B. (Ed.) (2010). *Ekonometria przestrzenna. Metody i modele analizy danych przestrzennych*. Warszawa: C.H. Beck.
- Sucheckí, B. (Ed.) (2012). *Ekonometria przestrzenna II. Modele zaawansowane*. Warszawa: C.H. Beck.
- Tobler, W. (1970). A Computer Movie Simulating Urban Growth in Detroit Region. *Economic Geography*, 46(2), 234–240.
- United Nations. Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2017). *World Population Prospects: The 2017 Revision, Key Findings and Advance Tables*. New York: United Nations.
- Wolny-Dominiak, A., Zeug-Żebro, K. (2012). Spatial statistics in the analysis of county budget incomes in Poland with the R CRAN. In: J. Ramik, D. Stavárek (Eds.). *Proceedings of 30<sup>th</sup> International Conference Mathematical Methods in Economics*, 992–998. Karviná, Czech Republic.
- Zeug-Żebro, K., Miśkiewicz-Nawrocka, M. (2017). Global analysis of the problem of aging society. In: T. Klietk (Ed.). *Globalization and Its Socio-Economic Consequences, 17th International Scientific Conference. Proceedings*, VI, 3076–3083. Zilina: University of Zilina.

**APPLICATION OF SPATIAL MODELS IN THE ANALYSIS  
OF THE PHENOMENON OF AN AGING POPULATION**

## Summary

The aging process is a multifaceted phenomenon affected by, inter alia, the demographic and spatial nature of individuals. The application of spatial analysis to investigate this process will demonstrate the existing relationships between the studied regions with respect to this phenomenon. The article attempts to model the phenomenon of spatial aging of the population. For selected variables characterizing an aging population, i.e. the total number of post-working age people – classic econometric models were constructed and the necessity of including the spatial factor in the process of modelling was verified. The demographic variables and variables of an economic and social nature were chosen as explaining variables of the model. For this purpose, two spatial models will be considered: the spatial error model and spatial lag model. All calculations and maps will be made in the statistical program R CRAN and Microsoft Excel.

**Keywords:** analysis of the phenomenon of old age, socio-economic effects, spatial error model, spatial delay model